نام و نام خانوادگی : **عنوان آزمون :** ریاضی۱۲ انسانی ماهیانه آبان

پایه تحصیلی : **زمان آزمون :**

نام دبیر : **تاریخ برگزاری** ۱۴۰۳/۰۸/۲۶

(۱) با حروف کلمهٔ "DARVISH" چند رمز عبور چهارحرفی می‌توان نوشت به طوری‌که حرف "R" در هر رمز باشد؟

(۱) ۱۲۰ (۲) ۲۴۰ (۳) ۳۶۰ (۴) ۴۸۰

پاسخ: (۴) گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا ۳ حرف از بین حروف (به‌جز R) که تعداد آن‌ها ۶ تا است انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{۶}{۳} = \frac{۶!}{۳!۳!} = \frac{۶\times۵\times۴\times۳!}{۶\times۳!} = ۲۰$$

حال جایگشت ۳ حرف انتخابی به همراه حرف R را حساب می‌کنیم (جمعاً ۴ حرف): $۴! = ۲۴$

و در نهایت تعداد کل حالات برابر است با: $۲۰\times۲۴ = ۴۸۰$

(۲) یک مجموعه‌ی ۱۰ عضوی، چند زیرمجموعه دارد که تعداد عضوهای آن حداقل ۳ عضو باشد؟

(۱) $\binom{۱۰}{۳}$ (۲) $۲^{۱۰} - \binom{۱۰}{۳}$ (۳) ۹۶۸ (۴) ۹۶۹

پاسخ: (۳) گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

نکته: تعداد کل زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی، ۲^n تاست.

چون تعداد حالات اصلی زیاد است، پس متمم را به‌دست می‌آوریم و از کل حالات کم می‌کنیم:

تعداد کل زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی ۱۰ عضوی $= ۲\times۲\times۲\times\cdots\times۲ = ۲^{۱۰} = ۱۰۲۴$

تعداد زیرمجموعه‌های ۰ عضوی $= \binom{۱۰}{۰} = ۱$

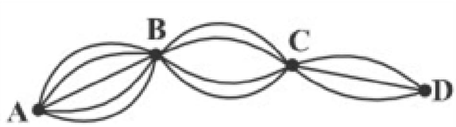
تعداد زیرمجموعه‌های ۱ عضوی $= \binom{۱۰}{۱} = ۱۰$

تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی $= \binom{۱۰}{۲} = \frac{۱۰!}{۲!\times۸!} = \frac{۱۰\times۹\times۸!}{۲!\times۸!} = ۴۵$

تعداد زیرمجموعه‌های دارای ۰ یا ۱ یا ۲ عضو - تعداد کل زیرمجموعه‌ها = تعداد زیرمجموعه‌های دارای حداقل ۳ عضو

$= ۱۰۲۴ - (۱ + ۱۰ + ۴۵) = ۹۶۸$

(۳) از شهر A تا شهر B، ۵ راه و از شهر B تا شهر C، ۴ راه و از شهر C تا شهر D، ۳ راه مطابق شکل وجود دارد. به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر D رفت و برگشت به‌طوریکه از هر مسیر حداکثر یک‌بار و از شهرهای B و C یک‌بار در مسیر رفت و یک‌بار در مسیر برگشت عبور کنیم؟



(۱) ۳۶۰ (۲) ۷۲۰ (۳) ۱۰۸۰ (۴) ۱۴۴۰

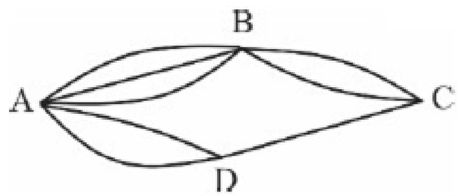
پاسخ: (۴) گزینه ۴ پاسخ صحیح است. برای رفتن از A به B، ۵ حالت و از B به C، ۴ حالت و از C به D، ۳ حالت داریم که طبق اصل‌ضرب $۵\times۴\times۳ = ۶۰$ حالت برای رفتن داریم. در مسیر برگشت از هر یک از مسیرهای رفت که آمده باشیم نمی‌توانیم برگردیم، بنابراین برای برگشت از D به C، ۲ حالت و از C به B، ۳ حالت و از B به A، ۴ حالت داریم که طبق اصل ضرب برای برگشت $۲\times۳\times۴ = ۲۴$ حالت داریم.

در مجموع برای رفت و برگشت $۶۰\times۲۴ = ۱۴۴۰$ حالت داریم.

۴) مطابق شکل مقابل، راه‌هایی بین شهرهای A، B، C و D وجود دارند که همه دوطرفه‌اند. مشخص کنید:

الف) به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر C رفت؟

ب) اگر عبور از شهر D ممنوع باشد، به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر C رفت و برگشت؟



پاسخ: ۱

$$\text{الف)}\ \left.\begin{array}{l} A \xrightarrow{۳} B \xrightarrow{۲} C \\ A \xrightarrow{۲} D \xrightarrow{۱} C \end{array}\right\} : (۳\times۲)+(۲\times۱)=۶+۲=۸$$

$$\text{ب)}\ A \xrightarrow{۳} B \xrightarrow{۲} C \xrightarrow{۲} B \xrightarrow{۳} A : (۳\times۲)\times(۲\times۳)=۶\times۶=۳۶$$

۵) حاصل عبارت $\dfrac{۷!}{۵!\times۳!}+۰!$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\frac{۷!}{۵!\times۳!}+۰!=\frac{۷\times\cancel{۶}\times\cancel{۵!}}{\cancel{۵!}\times\cancel{۳!}}+۱=۷+۱=۸$$

۶) به چند طریق می‌توان از بین ۵ مرد و ۳ زن، ۲ نفر را انتخاب کرد؛ به طوری‌که حداقل یک نفرشان مرد باشد؟

۱) ۲۲ ۲) ۳۰ ۳) ۲۵ ۴) ۲۰

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تعداد حالت‌های ممکن برابر است با:

$$\binom{۵}{۱}\binom{۳}{۱}+\binom{۵}{۲}\binom{۳}{۰}=۵\times۳+\frac{۵!}{۲!۳!}\times۱=۵\times۳+۱۰=۲۵$$

۷) با حروف کلمه «کوهستان» و بدون تکرار حروف: (با معنی و بی‌معنی)

الف) چند کلمه ۷ حرفی می‌توان نوشت؟

ب) چند کلمه ۶ حرفی می‌توان نوشت که با «ک» شروع و به «س» ختم شوند؟

پاسخ: ۱

الف) !۷ یا ۱×۲×۳×۴×۵×۶×۷ یا ۵۰۴۰

(ص ۱۱) ۱۲۰ = ۱×۵×۴×۳×۲×۱

۸) از جعبه‌ای با ۳ مهرهٔ قرمز و ۲ مهرهٔ آبی، ۲ مهره را با هم و بدون جایگذاری بیرون می‌آوریم. احتمال آنکه حداقل یک مهره، قرمز باشد، چقدر است؟

۱) $\frac{۷}{۸}$ ۲) $\frac{۳}{۱۰}$ ۳) $\frac{۷}{۱۰}$ ۴) $\frac{۹}{۱۰}$

پاسخ: ۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$n(s)=\binom{۵}{۲}=\frac{۵!}{۲!۳!}=۵\times۲=۱۰$$

$$n(A)=\underbrace{\binom{۳}{۱}}_{\text{یک قرمز}}\times\binom{۲}{۱}+\underbrace{\binom{۳}{۲}}_{\text{دو قرمز}}\binom{۲}{۰}=۳\times۲+۳=۹$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(s)}=\frac{۹}{۱۰}$$

۹) در کیسه‌ای ۵ مهرهٔ سبز، ۲ مهرهٔ قرمز و ۳ مهرهٔ آبی وجود دارد. سه مهره به تصادف خارج می‌کنیم، با کدام احتمال هیچ دوتایی از آن‌ها همرنگ نیستند؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

پاسخ: ۴ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر با تعداد حالات انتخاب ۳ مهره از مجموع $۱۰ = ۳ + ۲ + ۵$ مهره است:

$$n(S) = \binom{۱۰}{۳} = \frac{۱۰!}{۳!۷!} = \frac{۱۰\times۹\times۸\times۷!}{۳\times۲\times۱\times۷!} = ۱۲۰$$

اگر A پیشامد آن باشد که مهره‌ها ۳ رنگ مختلف باشند، داریم:

$$n(A) = \binom{۵}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۳}{۱} = ۵\times۲\times۳ = ۳۰$$

$$P(A) = \frac{۳۰}{۱۲۰} = \frac{۱}{۴}$$

۱۰) در پرتاب دو تاس، احتمال این‌که مجموع دو تاس عددی اول و فرد باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۱۲}$ ۲) $\frac{۱}{۳۶}$ ۳) $\frac{۷}{۱۸}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

می‌دانیم مجموع دو تاس از ۲ تا ۱۲ می‌تواند باشد. با توجه به خواسته سؤال تنها اعداد $۳, ۵, ۷, ۱۱$ قابل قبول هستند.

مجموع ۳ : $\{(۱,۲),(۲,۱)\}$

مجموع ۵ : $\{(۱,۴),(۲,۳),(۳,۲),(۴,۱)\}$

مجموع ۷ : $\{(۱,۶),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۳),(۵,۲),(۶,۱)\}$

مجموع ۱۱ : $\{(۵,۶),(۶,۵)\}$

بنابراین داریم:
$$n(A) = ۱۴ \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱۴}{۳۶} = \frac{۷}{۱۸}$$

۱۱) یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می‌کنیم.

الف) پیشامد اینکه سکه پشت یا تاس حداقل ۵ بیاید را بنویسید.

ب) احتمال اینکه سکه رو و تاس عدد اول بیاید را محاسبه کنید.

پاسخ: ۱

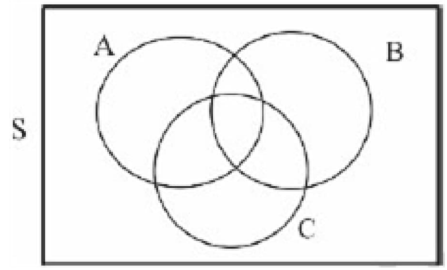
الف) $A = \{(\text{پ},۱),(\text{پ},۲),(\text{پ},۳),(\text{پ},۴),(\text{پ},۵),(\text{پ},۶),(\text{ر},۵),(\text{ر},۶)\}$

ب) $n(S) = ۶\times۲ = ۱۲$

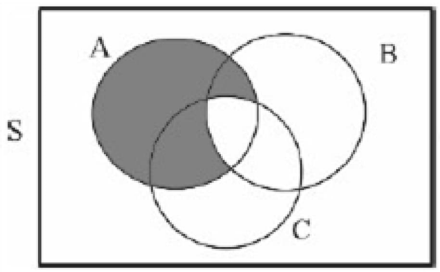
$B = \{((\text{ر},۲),(\text{ر},۳),(\text{ر},۵))\} \Rightarrow n(B) = ۳$

$$\Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۳}{۱۲} = \frac{۱}{۴}$$

۱۲) فرض کنید A و B و C سه پیشامد در فضای نمونه S باشند. عبارت مجموعه‌ای پیشامد زیر را نوشته و آن را در نمودار مقابل سایه بزنید.
«پیشامد A رخ دهد ولی پیشامد B و C رخ ندهد.»



پاسخ: ۱



$A-(B\cap C)$

۱۳) مجموع $A=\{۱,۲,۳,\dots,n\}$ مفروض است. احتمال اینکه زیرمجموعه‌ای ۳ عضوی از آن را تشکیل دهیم و فاقد عدد ۵ باشد برابر با ۴۰ درصد است. مجموعهٔ $B=\{۱,۲,۳,\dots,m\}$ مفروض است. تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی آن برابر با تعداد زیرمجموعه‌های ۵ عضوی آن می‌باشد. حاصل $\left[۲^{\frac{m-۲}{۲}}\right]$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۴

پاسخ: ۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در مورد مجموعه n عضوی A:

تعداد کل زیرمجموعه‌های ۳ عضوی: $\binom{n}{۳}$

تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی، فاقد عدد ۵: $\binom{n-۱}{۳}$

پس احتمال پیشامد موردنظر برابر است با:

$$\frac{\binom{n-۱}{۳}}{\binom{n}{۳}}=\frac{\frac{(n-۱)(n-۲)(n-۳)}{۱\times۲\times۳}}{\frac{n(n-۱)(n-۲)}{۱\times۲\times۳}}=\frac{n-۳}{n}$$

حاصل احتمال فوق را برابر با ۴۰ درصد قرار می‌دهیم:

$$\frac{n-۳}{n}=\frac{۴۰}{۱۰۰}\Rightarrow\frac{n-۳}{n}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow ۵n-۱۵=۲n\Rightarrow ۳n=۱۵\Rightarrow n=۵$$

در مورد مجموعه m عضوی B:

تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی: $\binom{m}{۳}$ تعداد زیرمجموعه‌های ۵ عضوی: $\binom{m}{۵}$

تعداد این‌ها را برابر قرار می‌دهیم: $\binom{m}{۳}=\binom{m}{۵}\Rightarrow m=۳+۵=۸$

نهایتاً داریم:

$$\left[۲^{\frac{m-n}{۲}}\right]\xrightarrow[n=۵]{m=۸}\left[۲^{\frac{۳}{۲}}\right]=\left[۲\sqrt{۲}\right]\xrightarrow{\sqrt{۲}\simeq ۱/۴}۲$$

۱ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. ابتدا ۳ حرف از بین حروف (به‌جز R) که تعداد آن‌ها ۶ تا است انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{۶}{۳} = \frac{۶!}{۳!۳!} = \frac{۶\times۵\times۴\times۳!}{۶\times۳!} = ۲۰$$

حال جایگشت ۳ حرف انتخابی به همراه حرف R را حساب می‌کنیم (جمعاً ۴ حرف): $۴! = ۲۴$

و در نهایت تعداد کل حالات برابر است با: $۲۰\times۲۴ = ۴۸۰$

۲ گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

نکته: تعداد کل زیرمجموعه‌های یک مجموعه n عضوی، ۲^n تاست.

چون تعداد حالات اصلی زیاد است، پس متمم را به‌دست می‌آوریم و از کل حالات کم می‌کنیم:

تعداد کل زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی ۱۰ عضوی $= ۲\times۲\times۲\times\cdots\times۲ = ۲^{۱۰} = ۱۰۲۴$

تعداد زیرمجموعه‌های ۰ عضوی $= \binom{۱۰}{۰} = ۱$

تعداد زیرمجموعه‌های ۱ عضوی $= \binom{۱۰}{۱} = ۱۰$

تعداد زیرمجموعه‌های ۲ عضوی $= \binom{۱۰}{۲} = \frac{۱۰!}{۲!\times۸!} = \frac{۱۰\times۹\times۸!}{۲!\times۸!} = ۴۵$

تعداد زیرمجموعه‌های دارای ۰ یا ۱ یا ۲ عضو - تعداد کل زیرمجموعه‌ها = تعداد زیرمجموعه‌های دارای حداقل ۳ عضو

$= ۱۰۲۴ - (۱ + ۱۰ + ۴۵) = ۹۶۸$

۳ گزینه ۴ پاسخ صحیح است. برای رفتن از A به B، ۵ حالت و از B به C، ۴ حالت و از C به D، ۳ حالت داریم که طبق اصل‌ضرب $۵\times۴\times۳ = ۶۰$ حالت برای رفتن داریم. در مسیر برگشت از هر یک از مسیرهای رفت که آمده باشیم نمی‌توانیم برگردیم، بنابراین برای برگشت از D به C، ۲ حالت و از C به B، ۳ حالت و از B به A، ۴ حالت داریم که طبق اصل ضرب برای برگشت $۲\times۳\times۴ = ۲۴$ حالت داریم.

در مجموع برای رفت و برگشت $۶۰\times۲۴ = ۱۴۴۰$ حالت داریم.

۴ الف) $\left.\begin{matrix} A \xrightarrow{۳} B \xrightarrow{۲} C \\ A \xrightarrow{۲} D \xrightarrow{۱} C \end{matrix}\right\} : (۳\times۲) + (۲\times۱) = ۶ + ۲ = ۸$

ب) $A \xrightarrow{۳} B \xrightarrow{۲} C \xrightarrow{۲} B \xrightarrow{۳} A : (۳\times۲)\times(۲\times۳) = ۶\times۶ = ۳۶$

۵ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. $\frac{۷!}{۵!\times۳!} + ۰! = \frac{۷\times\cancel{۶}\times\cancel{۵!}}{\cancel{۵!}\times\cancel{۳!}} + ۱ = ۷ + ۱ = ۸$

۶ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تعداد حالت‌های ممکن برابر است با:

$$\binom{۵}{۱}\binom{۳}{۱} + \binom{۵}{۲}\binom{۳}{۰} = ۵\times۳ + \frac{۵!}{۲!۳!}\times۱ = ۵\times۳ + ۱۰ = ۲۵$$

۷ الف) $۷!$ یا $۷\times۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱$ یا ۵۰۴۰

ص ۱۱) $۱۲۰ = ۱\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱$

۸) گزینه ۴ پاسخ صحیح است.
$$n(s) = \binom{۵}{۲} = \frac{۵!}{۲!۳!} = ۵\times۲ = ۱۰$$
$$n(A) = \underbrace{\binom{۳}{۱}}_{\text{یک قرمز}}\times\binom{۲}{۱} + \underbrace{\binom{۳}{۲}}_{\text{دو قرمز}}\binom{۲}{۰} = ۳\times۲+۳ = ۹$$
$$P(A) = \frac{n(A)}{n(s)} = \frac{۹}{۱۰}$$

۹) گزینه ۴ پاسخ صحیح است. تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر با تعداد حالات انتخاب ۳ مهره از مجموع $۱۰ = ۳+۲+۵$ مهره است:
$$n(S) = \binom{۱۰}{۳} = \frac{۱۰!}{۳!۷!} = \frac{۱۰\times۹\times۸\times۷!}{۳\times۲\times۱\times۷!} = ۱۲۰$$
اگر A پیشامد آن باشد که مهره‌ها ۳ رنگ مختلف باشند، داریم:
$$n(A) = \binom{۵}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۳}{۱} = ۵\times۲\times۳ = ۳۰$$
$$P(A) = \frac{۳۰}{۱۲۰} = \frac{۱}{۴}$$

۱۰) گزینه ۳ پاسخ صحیح است.
می‌دانیم مجموع دو تاس از ۲ تا ۱۲ می‌تواند باشد. با توجه به خواسته سؤال تنها اعداد $۳,۵,۷,۱۱$ قابل قبول هستند.

مجموع ۳ : $\{(۱,۲),(۲,۱)\}$

مجموع ۵ : $\{(۱,۴),(۲,۳),(۳,۲),(۴,۱)\}$

مجموع ۷ : $\{(۱,۶),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۳),(۵,۲),(۶,۱)\}$

مجموع ۱۱ : $\{(۵,۶),(۶,۵)\}$

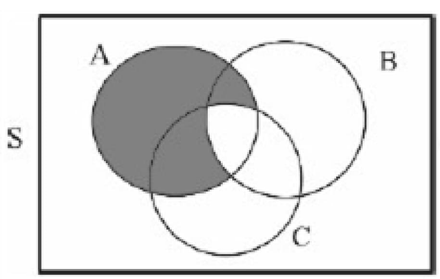
بنابراین داریم:
$$n(A) = ۱۴ \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱۴}{۳۶} = \frac{۷}{۱۸}$$

۱۱)
الف) $A = \{(\text{پ},۱),(\text{پ},۲),(\text{پ},۳),(\text{پ},۴),(\text{پ},۵),(\text{پ},۶),(\text{ر},۵),(\text{ر},۶)\}$

ب) $n(S) = ۶\times۲ = ۱۲$

$B = \{((\text{ر},۲),(\text{ر},۳),(\text{ر},۵))\} \Rightarrow n(B) = ۳$

$\Rightarrow P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{۳}{۱۲} = \frac{۱}{۴}$

۱۲)


$A-(B\cap C)$

۱۳ گزینه ۳ پاسخ صحیح است. در مورد مجموعه n عضوی A:

تعداد کل زیرمجموعه‌های ۳ عضوی: $\binom{n}{۳}$

تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی، فاقد عدد ۵: $\binom{n-۱}{۳}$

پس احتمال پیشامد موردنظر برابر است با:

$$\frac{\binom{n-۱}{۳}}{\binom{n}{۳}}=\frac{\frac{(n-۱)(n-۲)(n-۳)}{۱\times۲\times۳}}{\frac{n(n-۱)(n-۲)}{۱\times۲\times۳}}=\frac{n-۳}{n}$$

حاصل احتمال فوق را برابر با ۴۰ درصد قرار می‌دهیم:

$$\frac{n-۳}{n}=\frac{۴۰}{۱۰۰}\Rightarrow\frac{n-۳}{n}=\frac{۲}{۵}\Rightarrow ۵n-۱۵=۲n\Rightarrow ۳n=۱۵\Rightarrow n=۵$$

در مورد مجموعه m عضوی B:

تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی: $\binom{m}{۳}$ تعداد زیرمجموعه‌های ۵ عضوی: $\binom{m}{۵}$

تعداد این‌ها را برابر قرار می‌دهیم: $\binom{m}{۳}=\binom{m}{۵}\Rightarrow m=۳+۵=۸$

نهایتاً داریم: $\left[۲^{\frac{m-n}{۲}}\right]\xrightarrow[n=۵]{m=۸}\left[۲^{\frac{۳}{۲}}\right]=\left[۲\sqrt{۲}\right]\xrightarrow{\sqrt{۲}\simeq۱/۴}۲$

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	**۴**
۲	۱	۲	**۳**	۴
۳	۱	۲	۳	**۴**
۵	۱	۲	**۳**	۴
۶	۱	۲	**۳**	۴
۸	۱	۲	۳	**۴**
۹	۱	۲	۳	**۴**
۱۰	۱	۲	**۳**	۴
۱۳	۱	۲	**۳**	۴